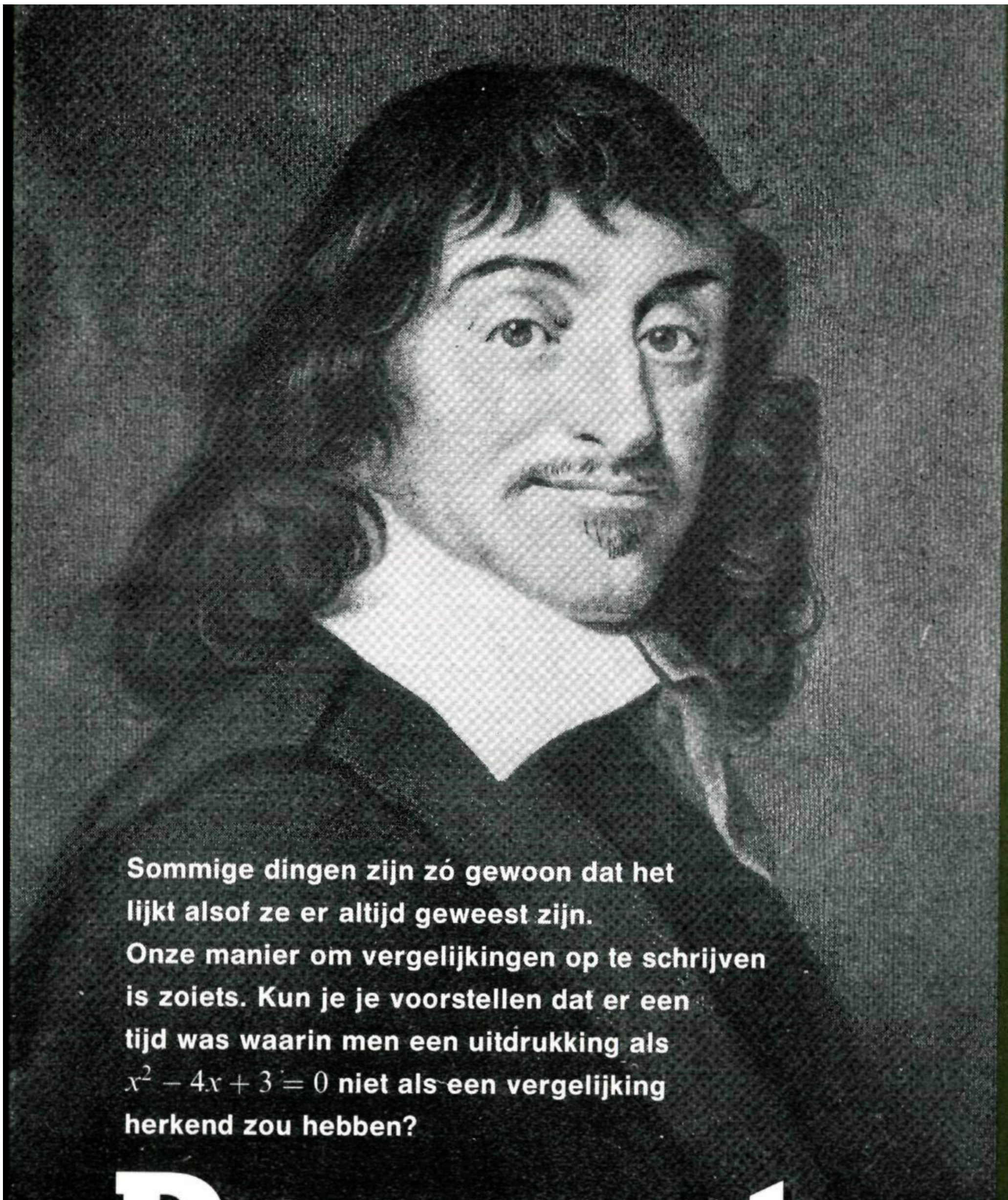
Descartes en zijn Nederlandse profeten

van Maanen, J.A.

Published in:
Pythagoras

Publication date:
1998



Sommige dingen zijn zó gewoon dat het lijkt alsof ze er altijd geweest zijn. Onze manier om vergelijkingen op te schrijven is zoiets. Kun je je voorstellen dat er een tijd was waarin men een uitdrukking als $x^2 - 4x + 3 = 0$ niet als een vergelijking herkend zou hebben?

Descartes en zijn

Jan van Maanen

Bij de vergelijking $y = 2x + 4$ zegt tegenwoordig iedereen onmiddellijk: "dat is een rechte lijn". Maar zo vanzelfsprekend is dat niet. In de eerste plaats moet je begrijpen dat er een vergelijking staat voor twee onbekende getallen x en y. Dan moet je begrijpen dat er oneindig veel oplossingen zijn. En tenslotte moet je ook nog op het idee komen dat je die oplossingen in een plaatje kunt tekenen. Tegenwoordig weten we niet beter, maar hieronder zul je lezen dat deze kennis nog niet eens zo heel oud is. De x en y, en het idee dat een vergelijking als $y = 2x + 4$ een lijn voorstelt, zijn in de wiskunde ingevoerd door de Franse filosoof René Descartes (1596–1650). Hij publiceerde zijn ontdekkingen in een bijlage bij een boek dat in 1637 in Leiden verscheen. Dit artikel gaat over het belang van die bijlage, de *Géométrie*. Maar het belang van een nieuwe ontwikkeling is – zoals vaak – alleen te begrijpen als je de voorgeschiedenis kent. Daarom kijken we nu eerst even naar de meetkunde en de algebra van voor 1600.

René Descartes
In 1996 was het 400 jaar geleden dat René Descartes geboren werd. Hoewel hij tegenwoordig het meest bekend is als filosoof mogen we hem ook zien als een van de belangrijkste wiskundigen uit de geschiedenis. Hij heeft in 1637 de wiskunde verrijkt met het idee dat je een getallenpaar (x, y) meetkundig kunt voorstellen als een punt in een vlak met een assenstelsel. Descartes had een roerig leven. Hij studeerde rechten, maar vond dat zijn opleiding pas voltooid was als hij ook ervaring had als militair. Daarom kwam hij in 1618 naar Nederland, om in het leger van Prins Maurits ervaring op te doen. Omdat de strijd tegen de Spanjaarden op dat moment stil lag (Twaalfjarig Bestand, 1609–1621) trok hij verder, en reisde half Europa door. Van Denemarken tot in Beieren en dan weer een paar jaar in Frankrijk wisselde hij met vele geleerden ideeën uit. Dat ging er niet altijd zacht aan toe, want Descartes was het vaak met anderen oneens. Het politieke en culturele klimaat in de Nederlanden was Descartes blijkbaar goed bevallen, want in 1628 kwam hij voor langere tijd terug. Hij woonde en werkte in Amsterdam, Franeker, Utrecht, Deventer en in de buurt van Leiden en Egmond. Zijn belangrijkste filosofische werk (*Discours de la méthode*) verscheen in Leiden in 1637. In een aanhangsel daarbij legde Descartes zijn nieuwe wiskundige ideeën vast. In 1649 vroeg koningin Christina van Zweden hem om als hof-filosoof naar Stockholm te komen. Het leven was hard, want de koningin begon de dag om vijf uur 's ochtends met filosofielessen. En Descartes woonde niet in het paleis. Hij overleed op 11 februari 1650 aan de gevolgen van een verkoudheid.

Nederlandse profeten

De kunst van het construeren
Sinds de Griekse oudheid was meetkunde vooral de kunst van het oplossen van constructieproblemen. Daarbij moest je je houden aan de spelregels die Euclides rond 300 voor Christus had opgesteld. Anders is er namelijk geen kunst aan.

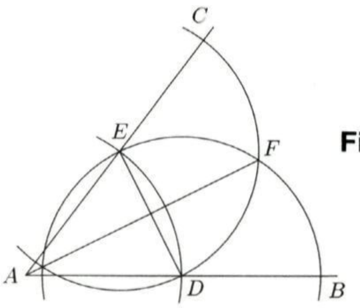
Wat mocht je doen van Euclides:

1. twee punten met een recht lijnstuk verbinden;

2. elk lijnstuk in een rechte lijn willekeurig ver doortrekken;

3. met een gegeven punt als middelpunt en een gegeven lijnstuk als straal een cirkel trekken.

Deze regels had hij in zijn boek, de *Elementen*, met zoveel woorden opgeschreven. Zonder nadere vermelding nam hij aan dat je snijpunten (van lijnen onderling, van cirkels onderling en van een lijn met een cirkel) verderop in de constructie weer mocht gebruiken. Kortom: passer en liniaal, daarmee moest het gebeuren. Hier volgt een voorbeeld van zo'n constructie (*Elementen*, Boek 1, Propositie 9).



Figuur 1

GEGEVEN: een hoek A met benen AB en AC.

TE CONSTRUEREN: de bissectrice van hoek A, dat is de lijn door A die hoek A in twee gelijke hoeken deelt.

CONSTRUCTIE (zie Figuur 1): Neem ergens op AB een punt D. Trek vervolgens de cirkel met middelpunt A en straal AD (eis 3). Laat deze cirkel lijn AC snijden in E. Trek nu lijnstuk DE (eis 1) en twee cirkels met DE als straal, respectievelijk met D en E als middelpunt (eis 3). Noem het snijpunt van deze cirkels dat het verst van A ligt F. Trek lijnstuk AF (eis 1). AF is de gevraagde bissectrice. Het bewijs dat AF inderdaad aan de vraagstelling voldoet berust op de symmetrie van de driehoeken $\triangle ADE$ en $\triangle DEF$; we slaan het over omdat het voor het vervolg niet van belang is.
Hoe kom je op het idee om het op deze manier aan te pakken? Als je de te zetten constructiestappen eenmaal hebt opgespoord, is het bewijs dat de constructie aan de vraagstelling voldoet meestal niet moeilijk meer. Maar voordat je zover bent ...

Het oplossen van vergelijkingen

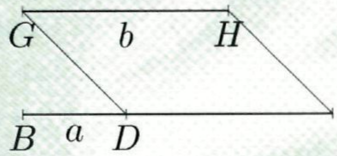
In de oudste wiskundige documenten (Egyptische papyrus-teksten en Babylonische kleitabletten, vanaf rond 1800 v. Chr.) treffen we reeds vergelijkingen aan. Vaak waren ze in een meetkundige context geformuleerd. Zoals: "Van een rechthoek met oppervlakte 60 is de lengte 7 meer dan de breedte. Wat zijn lengte en breedte?". Steeds ging het erom één of meer onbekende getallen te berekenen op grond van beweringen over die getallen. Ook in de Griekse wiskunde bestond belangstelling voor dit soort problemen, vooral bij Diophantus (ca. 250 n. Chr.) wiens oplossingsmethoden soms sterk lijken op die van de Babyloniërs. Net zoals Arabische wiskundigen vanaf 800 de meetkundige kennis van de Grieken verzamelden, deden ze dat ook met de methoden voor het oplossen van vergelijkingen. Al snel breidden ze die kennis ook uit. Rond 830 schreef Al-Khwārizmī er een leerboek over: *Hisab-al-gabr wa-l-muqābala*, dat in de twaalfde eeuw in het Latijn vertaald werd en bekend werd onder de naam Algebra *(van 'al-gabr')*.
In de zestiende eeuw deden Italiaanse rekenmeesters belangrijke stappen voorwaarts op algebraïsch gebied. Ze bedachten een algemene methode om vergelijkingen als $x^3 + 6x = 20$ en $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ via worteltrekken op te lossen. Voor vergelijkingen van het type $ax^2 + bx = c$ (vierkantsvergelijkingen) bestond zo'n algemene oplossingsformule (de 'abc-formule') al sinds de Babyloniërs. Aan de mogelijkheid om zo'n formule op te stellen voor vergelijkingen die beginnen met x^3 of x^4 was lang getwijfeld. Toen er toch zo'n formule gevonden werd, steeg het vertrouwen in de kracht van de algebra aanzienlijk. Algebra werd beschouwd als een 'ars magna' (een 'grote kunst'), naar de titel van het werk van Cardano uit 1545, *Ars magna*, waarin de nieuwe formules voor het eerst verschenen.

Algebra als methode

Toen Descartes in 1637 zijn revolutionaire wiskundige ontdekkingen bekend maakte, ging het hem eigenlijk niet zo erg om de wiskunde. De wiskunde moest vooral de filosofie dienen, want Descartes wilde in 1637 in de eerste plaats laten zien hoe ware kennis tot stand komt. Hij betoogt in zijn boek, *Discours de la Méthode*, dat men voor het ontwikkelen van ware kennis moet beginnen met het vaststellen van vaste, algemeen aanvaarde grondbeginselen. Vervolgens moet men uit die grondbeginselen via heldere regels nieuwe ware uitspraken afleiden (dat wordt wel de 'deductieve methode' genoemd). Nadat hij een algemene schets van zijn methode gegeven heeft, licht hij haar aan de hand van drie wetenschappen toe. Hij doet dat in drie lange aanhangsels bij de eigenlijke *Discours*. Het derde aanhangsel, pp. 297–413 van de *Discours de la Méthode* uit 1637, heet *la Géométrie* en is aan de wiskunde gewijd. De titel *Géométrie* geeft aan dat Descartes wil aantonen hoe ware kennis op het gebied van de meetkunde verkregen kan worden. De weg daartoe, zegt Descartes, is de algebra. Door de vele algebra maakt de *Géométrie* op de moderne lezer de indruk van een studie op een veel breder gebied dan alleen meetkunde. Maar voor Descartes is de methode (algebra) ondergeschikt aan het doel (meetkunde).

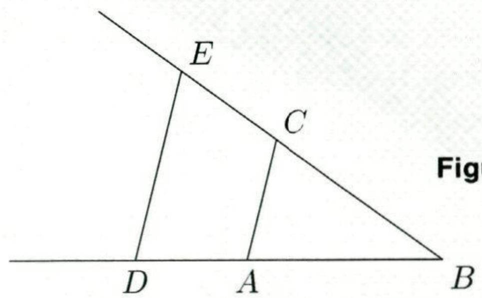
De nieuwe aanpak

Direct in het begin van de *Géométrie* ontvouwt Descartes zijn plan om algebra te gebruiken voor de analyse van constructieproblemen. Hij formuleert zijn plan na een inleiding van enkele pagina's (pp. 297-300) waarin hij laat zien hoe rekenkundige bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken) meetkundig voorgesteld kunnen worden.



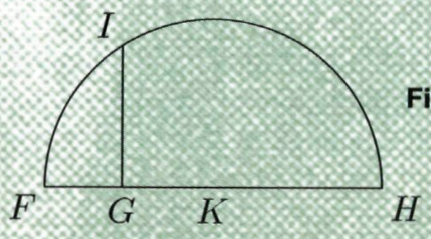
Figuur 2

Als je lijnstukken met letters aanduidt, zegt Descartes, elk lijnstuk door één enkele letter, dan kun je zeer eenvoudig meetkundige bewerkingen rekenkundig beschrijven. Neem bijvoorbeeld lijnstukken BD en GH (zie Figuur 2); noem het ene lijnstuk a en het andere b; $a + b$ wordt dan voorgesteld door het lijnstuk dat je krijgt als je GH aan BD vastmaakt in het verlengde van BD. Op soortgelijke wijze kan Descartes ook aan uitdrukkingen als $a - b$, $a \times b$, $a : b$ en $\sqrt{a}$ een meetkundige interpretatie geven. Voor $a \times b$ brengt Descartes een 'nieuwtje'. Vanaf de Griekse oudheid had het produkt van twee lijnstukken ook een betekenis, het was de rechthoek met zijden a en b. Op die manier kon men ook aan $a \times b \times c$ nog een betekenis geven, namelijk de balk met ribben a, b en c, maar dan hield het op. Produkten als $abcd$ of a^2b^3 hadden geen meetkundige betekenis meer, terwijl Descartes aan alle algebraïsche uitdrukkingen een meetkundige betekenis wilde geven. Hoe deed hij dat? We bekijken zijn eigen figuur (Figuur 3).



Figuur 3

Om het produkt $BC \times BD$ meetkundig weer te geven, zegt Descartes, teken ik eerst BC en BD in twee verschillende richtingen. Ook kies ik een lengte-eenheid AB, en die teken ik vanuit B op lijn BD. Dan (letterlijk citaat) "hoef ik alleen maar de punten A en C te verbinden, en vervolgens DE evenwijdig aan CA te tekenen, en BE is de uitkomst van deze Vermenigvuldiging." [Ga maar na. De driehoeken ABC en DBE zijn gelijkvormig, en de lengte van AB is 1.] Deling gaat net zo. Descartes zegt het als volgt. "En als BE door BD gedeeld moet worden, dan verbind ik eerst D met E, en dan trek ik AC evenwijdig aan DE en BC is de uitkomst van deze deling." Het voordeel is dat nu de uitkomsten van vermenigvuldiging en deling van lijnstukken zelf ook weer lijnstukken zijn. Zo kun je, in tegenstelling tot de meetkundigen uit de Oudheid, ook een betekenis geven aan produkten als $abcd$ of a^2b^3; bij Descartes zijn dat gewoon lijnstukken. Met behulp van de lengte-eenheid (in Figuur 4 is dat FG) kan Descartes ook de wortel uit een lijnstuk meetkundig voorstellen.



Figuur 4

Nadat hij dit allemaal gedaan heeft ontvouwt Descartes zijn plan om algebra in te schakelen voor het oplossen van meetkundige constructieproblemen. Letterlijk vertaald luidt het begin van dat plan als volgt (*Géométrie* 1637, p. 300).

"Hoe men tot de vergelijkingen moet komen die dienen om de problemen op te lossen. Men moet, wanneer men een of ander [constructie]probleem wil oplossen, het eerst als reeds gedaan beschouwen, & namen geven aan alle lijnstukken die noodzakelijk lijken om het te construeren, even goed aan die die onbekend zijn als aan de andere. Vervolgens moet men, zonder enig onderscheid te maken tussen de bekende & onbekende lijnstukken, in de volgorde die er van alle het meest natuurlijk uitziet, kijken hoe zij [de lijnstukken] met elkaar samenhangen. Dat doet men totdat men een manier heeft gevonden om één zelfde grootheid op twee manieren uit te drukken: hetgeen een Vergelijking genoemd wordt. (. . .) En men moet even veel van dergelijke vergelijkingen vinden als men lijnstukken aangenomen heeft die onbekend zijn." Dit is in Descartes' eigen woorden het eerste deel van het plan, het vertalen van het meetkundige probleem in één of meer vergelijkingen. De te construeren lijnstukken spelen de rol van de onbekenden in die vergelijkingen. Daarmee heeft hij het meetkundige probleem vertaald in een algebraïsch probleem. Zijn volgende stap is: los de onbekende(n) uit de vergelijking(en) op. Je hebt dan een algebraïsche uitdrukking voor de te construeren lijnstukken. Tenslotte moet je de gevonden algebraïsche uitdrukkingen weer terugvertalen naar de meetkunde en het gezochte lijnstuk ook daadwerkelijk construeren. Zo luidt het plan. Het ziet er nu nog erg vaag uit, maar het voorbeeld dat straks komt zal hopelijk veel verduidelijken.

Descartes vond licht in het duister zelf niet zo nodig. Ook voor zijn tijdgenoten moet het plan – en de hele *Géométrie* trouwens – moeilijk te doorgronden zijn geweest. Het eerste voorbeeld dat Descartes zelf geeft is meteen zo'n technisch hoogstandje dat de onervaren lezer er weinig aan gehad zal hebben. Ook op andere plaatsen slaat hij in redeneringen grote stukken over en hij stapelt zoveel nieuwe en ingewikkelde zaken op elkaar dat de *Géométrie* buiten het bereik van de meeste tijdgenoten moet hebben gelegen. Regelmatig komt hij er eerlijk voor uit dat hij zaken weglaat. Direct na zijn plan schrijft hij bijvoorbeeld: "Ik zal dit niet in detail uitleggen, en wel omdat ik u het plezier zou ontnemen om het u op eigen kracht eigen te maken, & het nut om uw geest te ontwikkelen door u erin te oefenen, hetgeen naar mijn mening het voornaamste is dat men van deze wetenschap kan meenemen. Mede daar ik niets opmerk dat zo moeilijk is dat degenen die enigszins thuis zijn in de elementaire Meetkunde & in de Algebra, & die acht zullen slaan op al wat in deze verhandeling staat, het niet zouden kunnen vinden." (pp. 301-302). En wat te denken van: " & ik zal proberen om aan het bewijs weinig woorden vuil te maken. Want het verveelt me al er zoveel over te schrijven." (p. 309). Descartes vat zijn houding samen in de fameuze laatste zin van de *Géométrie* (p. 413): "Ik hoop dat volgende generaties me dankbaar zullen zijn, niet alleen voor de zaken die ik hier uiteengezet heb; maar ook voor die die ik hier bewust heb weggelaten om hun het plezier te laten ze zelf te ontdekken."

Als Descartes dit alles serieus gemeend heeft moeten we vaststellen dat hij de meeste lezers van zijn werk overschat heeft. Het invullen van de weggelaten stappen in een zo nieuw gebied vraagt zoveel werk dat slechts een enkeling er zelfstandig toe in staat zal zijn geweest.

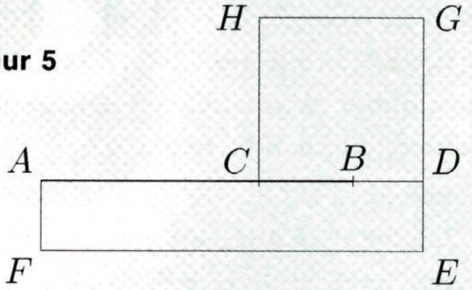
Frans van Schooten geeft uitleg

Het belang van de *Géométrie* is pas goed tot uiting gekomen toen het werk verder uitgewerkt werd door Frans van Schooten (1615–1660; in het laatste juninummer van Pythagoras vind je meer over zijn leven). Van Schooten vertaalde de *Géométrie* in het Latijn, waardoor veel meer mensen het werk konden lezen. Bij de vertaling voegde hij nog veel meer pagina's commentaar met uitleg. Het boek was populair, want na de eerste druk (1649) verscheen nog een veel uitgebreidere tweede (1659/1661), die in 1683 nog een keer uitgebracht werd. Het was verplichte kost voor alle belangrijke wiskundigen uit het laatste kwart van de zeventiende eeuw, en het gaf Newton en Leibniz de bouwstenen en inspiratie voor de uitvinding van de differentiaal- en integraalrekening.

Wat deed Van Schooten met dat nogal vage plan van Descartes? In de eerste plaats vertaalde hij het in het Latijn, zoals hij met de gehele *Géométrie* deed. Al vertalend werkte hij er meteen een aantal onduidelijkheden in weg. Ook bracht hij er meer systeem in aan, bijvoorbeeld door in figuren de keuze van letters te veranderen. Bij Van Schooten worden bijvoorbeeld punten die in verschillende figuren dezelfde rol spelen met dezelfde letters aangeduid. Descartes had daar niet op gelet. In de tweede plaats gaf hij uitleg bij het plan. Hij behandelde als voorbeeld twee concrete problemen, die hij volgens het plan van Descartes oploste. We bekijken hier nu zijn eerste voorbeeld. De stappen uit het plan staan er voor het gemak nog een keer, schuin gedrukt.

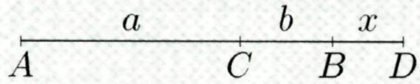
[*Zo moet men, wanneer men een of ander probleem wil oplossen, ...*] Van Schooten komt met het volgende constructieprobleem: "Gegeven een lijnstuk AB, waarop een punt C ligt. Construeer op het verlengde van AB een punt D, en wel zo, dat de rechthoek met zijden AD en DB gelijk is aan het vierkant op zijde CD."

Figuur 5



[... *het eerst als reeds gedaan beschouwen,* ...] Van Schooten maakt dus een tekening (gereproduceerd in Figuur 5), waarin hij aanneemt dat hij het gezochte punt D reeds gevonden heeft; de rechthoek met zijden AD en DB (in de figuur is dat de rechthoek $ADEF$, want hij heeft DE even lang gemaakt als DB) moet dus dezelfde oppervlakte hebben als het vierkant op zijde CD (in de figuur $CDGH$).

[... *namen geven aan alle lijnstukken die noodzakelijk lijken om het te construeren, even goed aan lijnstukken die onbekend zijn als aan de andere.* ...] Het gaat er om, zegt Van Schooten, lijnstuk BD te vinden. Dat is de onbekende, en die noem ik x. Verder waren AC en CB vooraf gegeven, dus voor AC schrijf ik de bekende grootheid a en voor CB de bekende b. Zo had Descartes het ingevoerd: bekende grootheden geef je namen met letters uit het begin van het alfabet, voor de onbekenden kies je letters uit het eind. [*Vervolgens moet men (...) kijken hoe zij (de lijnstukken) met elkaar samenhangen,* ...] In de formulering van het probleem komen de lijnstukken AD, BD en CD voor, zegt Van Schooten, en die hebben het volgende onderlinge verband: $AD = a + b + x$; $BD = x$ en $CD = b + x$ (zie Figuur 6).



Figuur 6

[... *totdat men een manier heeft gevonden om eenzelfde grootheid op twee manieren uit te drukken*: ...] Die grootheid ligt door de formulering van het probleem erg voor de hand. De oppervlakte van $ADEF$ kan men namelijk op twee manieren uitrekenen. In de eerste plaats kan dat rechtstreeks:
$AD \times DE = AD \times BD = (a + b + x)x$.
Maar de oppervlakte is ook gelijk aan de oppervlakte van $CDGH$, en die is $CD \times CD = (b + x)^2$.
Dus $(a + b + x)x = (b + x)^2$. [... *hetgeen een Vergelijking genoemd wordt; (...) En men moet even veel van dergelijke vergelijkingen vinden als men lijnstukken aangenomen heeft die onbekend zijn.*] In dit geval is er dus één vergelijking in één onbekende. Van Schooten voert ook, door de vergelijking op te lossen en de oplossing terug te vertalen naar de meetkunde, de volgende twee stappen van Descartes'

plan uit. We volgen hem op de voet. Hij begint dus met de vergelijking

$$(a+b+x)x=(b+x)^2$$

Aan beide kanten werkt hij de haakjes weg en vindt

$$ax+bx+x^2=b^2+2bx+x^2.$$

We volgen hem verder even op de voet (letterlijk vertaald uit het Latijn):
"En om die vergelijking te vereenvoudigen neme men van beide kanten bx en x^2 weg, zodat aan de ene kant ax overblijft, en aan de andere kant b^2+bx; dan krijg je, nadat bx met verandering van teken naar de andere kant gebracht is, deze vergelijking:

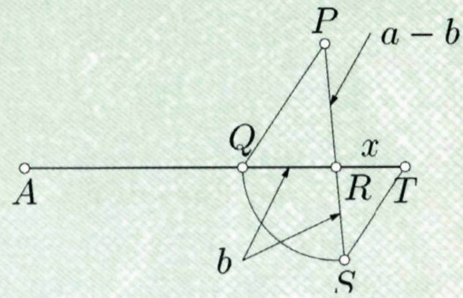
$$ax-bx=b^2.$$

En daaruit ontstaat, nadat beide kanten door $a-b$ gedeeld zijn

$$x=\frac{b^2}{a-b}."$$

De oplossing van het algebraïsche probleem is nu bekend. Nu moet Van Schooten de algebraïsche uitdrukking $\frac{b^2}{a-b}$ die hij voor x (dat is het gezochte lijnstuk BD) gevonden heeft nog meetkundig vertalen. Dat kun je zo doen: uit $x=\frac{b^2}{a-b}$ volgt door links en rechts door b te delen: $x:b=b:(a-b)$. Een dergelijke gelijkheid van verhoudingen treedt op in gelijkvormige driehoeken. Maak een driehoek $\triangle PQR$ waarvan $PR=a-b$ en $QR=b$ twee van de drie zijden zijn (zie Figuur 7); de derde zijde PQ is willekeurig.

Teken op het verlengde van PR het punt S zó dat $RS=b$, en construeer door S een



Figuur 7

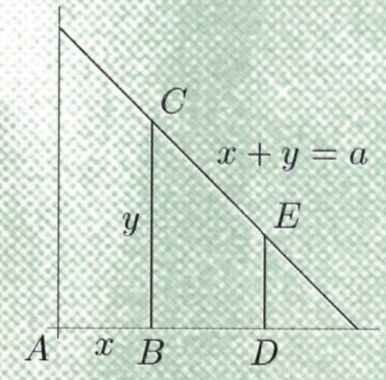
lijn ℓ evenwijdig aan PQ (dat kan volgens de spelregels van Euclides, maar dat doet nu even niet ter zake). Laat T het snijpunt zijn van ℓ en het verlengde van RQ, dan zijn de driehoeken $\triangle STR$ en $\triangle PQR$ gelijkvormig, zodat $RT:RS=RQ:RP$, ofwel $RT:b=b:(a-b)$. Voor lijnstuk RT geldt dus: $RT=\frac{b^2}{a-b}$, en dus is de meetkundige constructie van de onbekende gevonden. Je moet BD dus even lang maken als lijnstuk RT uit Figuur 7.
Tot zover gaat het commentaar van Van Schooten. Het is een heldere uitleg, die de moeilijk te begrijpen tekst van de *Géométrie* aan de hand van een concreet voorbeeld een stuk duidelijker maakt. Zo gaat dat steeds. Steeds roept de *Géométrie* bij de lezer vragen op zoals "Waarom is dat zo?", "Wat bedoelt hij hiermee?", "Hoe moet ik dat in de praktijk uitvoeren?" Veel van deze vragen beantwoordt Van Schooten in zijn commentaren. Om een indruk te geven van de omvang van dit werk: de Latijnse tekst van de *Géométrie* beslaat in de editie van 1659 106 pagina's, de commentaren van Van Schooten 200 pagina's en bijgevoegd werk van anderen nog enkele honderden. Veel daarvan werd geschreven door leerlingen van Van Schooten (Huygens, Van Heuraet, Hudde en De Witt). Gestimuleerd door hun leraar hebben zij de mogelijkheden van Descartes' wiskunde verkend en ze zijn de eersten geweest die de grenzen ervan verlegd hebben. Samen met Van Schooten waren zij de Nederlandse profeten van Descartes.

Meer onbekenden

Misschien vraag je je nog af: wat deed Descartes nu als hij bij het uitvoeren van zijn plan meer onbekenden had dan hij vergelijkingen kon opstellen. Stel bijvoorbeeld dat er twee onbekenden x en y zijn, en dat

$$x + y = a$$

de enige vergelijking is. Daar deed hij niet moeilijk over. In dat geval, zei Descartes, kies je één onbekende (bijvoorbeeld x) zelf. Die teken je vanuit een vast punt A (de oorsprong) in een bepaalde richting (lijnstuk AB in Figuur 8). Bij deze x kun je nu y bepalen, want $y = a - x$, en die teken je vanuit B in een andere richting (bijvoorbeeld loodrecht omhoog, lijnstuk BC in Figuur 8). Je ziet hier het assenstelsel om de hoek komen, want de lijnen door A die de richting van de x en de y aangeven zijn onze tegenwoordige x-as en y-as. Zo'n assenstelsel wordt trouwens wel 'Cartesisch produkt' genoemd, naar 'Cartesius', zoals de Latijnse naam van Descartes was.



Figuur 8

Als je een andere x kiest (bijvoorbeeld AD), dan hoort daarbij een andere y (DE), die je in dezelfde richting tekent als de vorige y. Dat kun je oneindig vaak herhalen, en als je dat doet vind je een grafiek. Bij Descartes heette dat een 'courbe' (kromme, in dit geval is de kromme een lijnstuk). In de *Géométrie* komen allerlei krommen voor, vooral krommen die ingewikkelder waren dan rechte lijnen, zoals parabolen en ellipsen. De grote stap voorwaarts is dat de wiskunde dankzij Descartes een nieuwe en heel handige manier had gekregen om meetkundige figuren (zoals lijnen, cirkels, parabolen) te beschrijven, namelijk met een vergelijking in x en y. Voor 1637 bestond dat niet, behalve dan in de schriftjes van Fermat, want die had het onafhankelijk van Descartes ook bedacht. In 1637 was het er allemaal, als een donderslag bij heldere hemel. En we hebben het aan Van Schooten te danken dat wij dit alles nu nog steeds kennen en gebruiken.